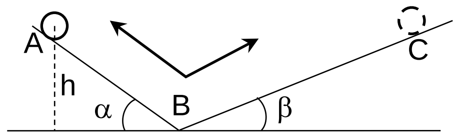
Přijímací zkouška na navazující magisterské studium - 2018
Studijní program Fyzika - všechny obory kromě Učitelství fyziky-matematiky pro střední školy, Varianta A

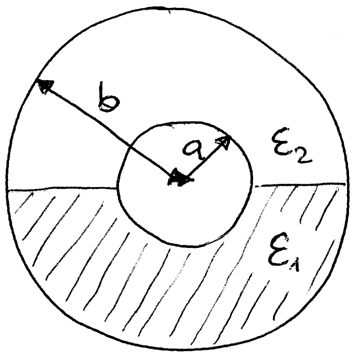
Příklad 1 (25 bodů)

Určete periodu periodického pohybu tělesa, které se klouzavě pohybuje po dvou nakloněných rovinách svírajících s vodorovnou rovinou úhel α, resp. β (viz. obrázek). V čase $t = 0$ je těleso volně puštěné z bodu A ve výšce h. Zanedbejte všechna tření při pohybu i ztráty kinetické energie tělesa při dopadu z jedné roviny na druhou.



Příklad 2 (25 bodů)

Kondenzátor je tvořen dvěma soustřednými kulovými elektrodami o poloměrech a a b ($a < b$). Spodní polovina objemu mezi elektrodami je vyplněna dielektrikem o permitivitě ε_1. Vrchní polovina kondenzátoru je vyplněna dielektrikem o permitivitě ε_2. Na vnitřní elektrodu je přiveden náboj Q.



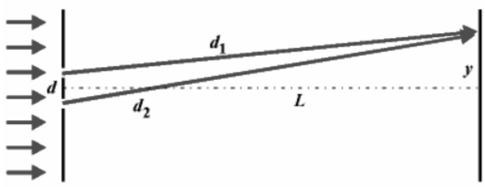
a) Pomocí zadaných veličin (Q, ε_1, ε_2) vyjádřete velikost volného náboje Q_1 na té části vnitřní elektrody, která je v kontaktu s dielektrikem o permitivitě ε_1.

b) Určete velikost a směr intenzity elektrického pole $\vec{E}_1$, respektive $\vec{E}_2$, v části kondenzátoru vyplněné dielektrikem o permitivitě ε_1, respektive ε_2, a obě intenzity porovnejte.

c) Odvoďte výraz pro kapacitu tohoto kondenzátoru.

Příklad 3 (25 bodů)

Určete a nakreslete průběh intenzity světla $I(y)$ na stínítku při Youngově interferenčním pokusu, kdy na dvě velmi úzké rovnoběžné štěrbiny vzdálené od sebe d dopadá kolmo rovinná harmonická vlna. Stínítko je umístěno ve vzdálenosti L ($L \gg d$), viz obr. Řešte pro malé úhly od osy ($y \ll L$) a neuvažujte ohyb na štěrbinách.



Jaká je šířka s proužků interferenčního obrazce? Dosaďte $L = 1$ m, $\lambda = 500$ nm, $d = 1$ mm.

Příklad 4 (25 bodů)

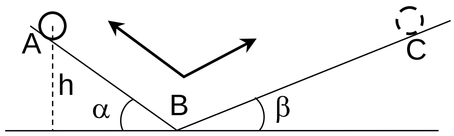
Chlór se v přírodě vyskytuje jako izotop ^{35}Cl a jako izotop ^{37}Cl. Přechod (0→1) vibračního spektra molekuly H^{35}Cl leží při vlnočtu $1/\lambda_{35Cl} = 2888{,}9$ cm^{-1}. Relativní atomové hmotnosti vodíku a izotopu ^{35}Cl a ^{37}Cl jsou $A_r(\mathrm{H}) = 1$, $A_r(^{35}\mathrm{Cl}) = 35$ a $Ar(^{37}\mathrm{Cl})=37$.

a) Při jakém vlnočtu $1/\lambda_{37Cl}$ leží stejný přechod pro molekulu H^{37}Cl? Výsledek vyjádřete jako poměr $\lambda_{37Cl}/\lambda_{35Cl}$ Vodík uvažujte pouze jako izotop ^{1}H. Zanedbejte anharmonicitu i změny rotačních stavů molekuly (dochází i ke změně rotačního stavu o $\Delta J=\pm 1$). Molekulu HCl je tedy v prvním přiblížení možné považovat za kvantový harmonický oscilátor.

b) Kolik translačních, rotačních a vibračních stupňů volnosti má molekula chlóru?

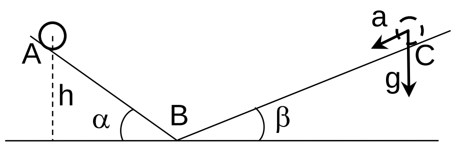
Příklad 1

Určete periodu periodického pohybu tělesa, které se klouzavě pohybuje po dvou nakloněných rovinách svírajících s vodorovnou rovinou úhel α, resp. β (viz. obrázek). V čase t = 0 je těleso volně puštěné z bodu A ve výšce h. Zanedbejte všechna tření při pohybu i ztráty kinetické energie tělesa při dopadu z jedné roviny na druhou.



Řešení:

Předpokládejme, že na začátku je těleso v místě A ve výšce h nad vodorovnou rovinou společnou pro obě nakloněné roviny. Dle zákona zachování mechanické energie dorazí do místa B těleso s rychlostí



$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

(5 bodů)

a dále se pohybuje po dráze BC s rychlostí, která se mění během času podle vztahu

$$v = v_0 - at = v_0 - gtsin\beta$$

(5 bodů)

Maximální výšky v místě C dosáhne těleso v čase t_1, pro který platí

$$t_1 = \frac{v_0}{gsin\beta}$$

(5 bodů)

Čas, za který se vrátí těleso z bodu C do bodu B bude ten samý t_1. Celkový čas pohybu po úseku BC tam a zpět bude tedy

$$T_1 = 2t_1 = \frac{2v_0}{gsin\beta}$$

(5 bodů)

Analogicky celkový čas pohybu tělesa tam a zpět po úseku BA bude

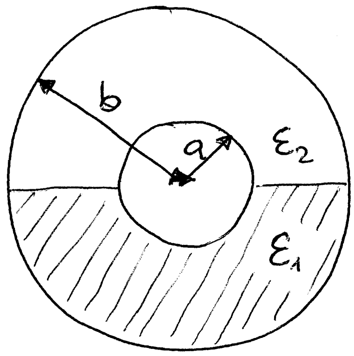
$$T_2 = \frac{2v_0}{gsin\alpha}$$

Perioda pohybu tedy bude

$$T = T_1 + T_2 = \frac{2v_0}{g}\left(\frac{1}{sin\alpha} + \frac{1}{sin\beta}\right) = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(\frac{1}{sin\alpha} + \frac{1}{sin\beta}\right)$$

(5 bodů)

Příklad 2



Kondenzátor je tvořen dvěma soustřednými kulovými elektrodami o poloměrech a a b ($a < b$). Spodní polovina objemu mezi elektrodami je vyplněna dielektrikem o permitivitě ε_1. Vrchní polovina kondenzátoru je vyplněna dielektrikem o permitivitě ε_2. Na vnitřní elektrodu je přiveden náboj Q.

a) Pomocí zadaných veličin (Q, ε_1, ε_2) vyjádřete velikost volného náboje Q_1 na té části vnitřní elektrody, která je v kontaktu s dielektrikem o permitivitě ε_1.

b) Určete velikost a směr intenzity elektrického pole $\vec{E}_1$, respektive $\vec{E}_2$, v části kondenzátoru vyplněné dielektrikem o permitivitě ε_1, respektive ε_2, a obě intenzity porovnejte.

c) Odvoďte výraz pro kapacitu tohoto kondenzátoru.

Řešení

Obě elektrody představují ekvipotenciální plochy a protože jsou navíc rozloženy s kulovou symetrií kolem společného středu, musí být intenzita elektrického pole mezi nimi všude stejná. Náboj se přerozdělí tak, aby jeho hustota byla větší v části vyplněné dielektrikem s větší hodnotou dielektrické konstanty.

a) Musí platit $Q = Q_1 + Q_2$ a zároveň $\dfrac{Q_1}{Q_2} = \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ z čehož plyne $Q = Q_1 + \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} Q_1 = Q_1\left(\dfrac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)$

a tedy
$$Q_1 = Q\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right)$$
(5 bodů)

b) Podle Gaussova zákona pro dielektrika můžeme psát $\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$. Z důvodu symetrie musí být směr vektoru elektrické indukce $\vec{D}$ a intenzity elektrického pole $\vec{E}$ radiální a pro jejich velikost platí:

$$D_1 2\pi r^2 + D_2 2\pi r^2 = \varepsilon_1 E_1 2\pi r^2 = \varepsilon_2 E_2 2\pi r^2 = Q$$

Protože musí platit $E = E_1 = E_2$, dostáváme $E = \dfrac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) r^2}$

což lze s využitím výsledku části a) zapsat též takto:

$$E = E_1 = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_1 r^2} = E_2 = \frac{Q_2}{2\pi\varepsilon_2 r^2}$$
(5 bodů)

c) Kapacita je definována jako $C = \dfrac{Q}{U}$. Na kondenzátor lze pohlížet jako na paralelní zapojení dvou polokulových kondenzátorů o kapacitách C_1 a C_2, každý vyplněný jiným dielektrikem. Pro výpočet výsledné kapacity musíme nejprve spočíst napětí mezi oběma elektrodami. K tomu lze využít výsledků získaných v části a). Stejně jako intenzita elektrického pole musí i napětí mezi elektrodami být všude stejné. Pokud je náboje Q kladný, bude větší potenciál na vnitřní elektrodě. Chceme-li získat kladnou hodnotu napětí, musíme integrovat od b do a:

$$U = -\int_b^a E dr = = -\int_b^a \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) r^2} dr = -\frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}\left[-\frac{1}{r}\right]_b^a = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$
(7 bodů)

Kapacita části kondenzátoru vyplněné dielektrikem o permitivitě ε_1 tedy bude

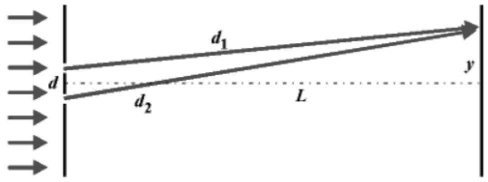
$$C_1 = \frac{Q_1}{U} = Q\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right)\frac{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{Q}\left(\frac{ab}{b-a}\right) = 2\pi\varepsilon_1\left(\frac{ab}{b-a}\right)$$

Kapacitu C_2 spočteme stejným způsobem a výsledná kapacita tedy bude:

$$C = C_1 + C_2 == 2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_1)\left(\frac{ab}{b-a}\right) \qquad \text{(8 bodů)}$$

Příklad 3

Určete a nakreslete průběh intenzity světla $I(y)$ na stínítku při Youngově interferenčním pokusu, kdy na dvě velmi úzké rovnoběžné štěrbiny vzdálené od sebe d dopadá kolmo rovinná harmonická vlna. Stínítko je umístěno ve vzdálenosti L ($L \gg d$), viz obr. Řešte pro malé úhly od osy ($y \ll L$) a neuvažujte ohyb na štěrbinách.



Jaká je šířka s proužků interferenčního obrazce? Dosaďte L = 1 m, λ = 500 nm, d = 1 mm.

Řešení

Intenzita světla je dána

$$I = \frac{cn\varepsilon_0}{2}|E|^2$$

Celková elektrická intenzita na stínítku vzniká superpozicí dvou vln od štěrbin

$$E = A_1 e^{i(kd_1-\omega t)} + A_2 e^{i(kd_2-\omega t)}$$ (4 body)

Z toho pro intenzitu dostáváme

$$I = \frac{cn\varepsilon_0}{2}EE^* = \frac{cn\varepsilon_0}{2}\left(A_1 e^{i(kd_1-\omega t)} + A_2 e^{i(kd_2-\omega t)}\right)\left(A_1^* e^{-i(kd_1-\omega t)} + A_2^* e^{-i(kd_2-\omega t)}\right)$$
$$= \frac{cn\varepsilon_0}{2}\left(|A_1|^2 + |A_2|^2 + A_1 A_2^* e^{ik\Delta d} + c.c.\right)$$
$$= \frac{cn\varepsilon_0}{2}\left(|A_1|^2 + |A_2|^2 + 2|A_1||A_2|\cos k\Delta d\right) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos k\Delta d$$

Protože $I_1 = I_2 \equiv I_0$

$$I = I_0(2 + 2\cos k\Delta d) = 4I_0\cos^2\frac{k\Delta d}{2}$$ (8 bodů)

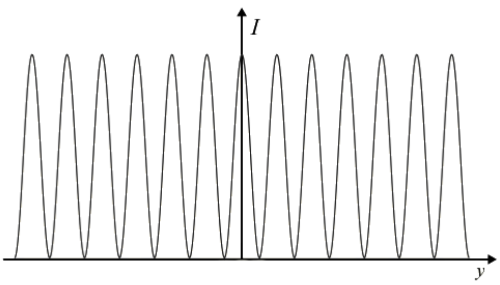
Dráhový rozdíl Δd spočteme z rozdílu vzdáleností daného místa na stínítku od obou štěrbin v kartézských souřadnicích a s uvážením $y, d \ll L$ nebo, jednodušeji, z pravoúhlého trojúhelníku

$$\Delta d = d\sin\alpha \approx d\frac{y}{L}$$

Takže

$$I(y) = 4I_0\cos^2\frac{kdy}{2L} = 4I_0\cos^2\frac{kdy}{2L}$$ (4 body)

Obrázek:



(3 body)

Šířka proužku je vzdálenost mezi minimy. První minimum nastává, když argument cosinu je roven $\pi/2$, takže pro y_{min} platí

$$y_{min} = \frac{L\pi}{kd} = \frac{L\lambda}{2d}$$

$$s = 2y_{min} = \frac{L\lambda}{d} \qquad \text{(4 body)}$$

Po dosazení $s = 0{,}5$ mm. (2 body)

Příklad 4

Chlór se v přírodě vyskytuje jako izotop ^{35}Cl a jako izotop ^{37}Cl. Přechod (0→1) vibračního spektra molekuly $H^{35}Cl$ leží při vlnočtu $1/\lambda_{35Cl}$ = 2888,9 cm^{-1}. Relativní atomové hmotnosti vodíku a izotopu ^{35}Cl a ^{37}Cl jsou $A_r(H) = 1$, $A_r(^{35}Cl) = 35$ a $Ar(^{37}Cl)=37$.

a) Při jakém vlnočtu $1/\lambda_{37Cl}$ leží stejný přechod pro molekulu $H^{37}Cl$? Výsledek vyjádřete jako poměr $\lambda_{37Cl}/\lambda_{35Cl}$ Vodík uvažujte pouze jako izotop ^{1}H. Zanedbejte anharmonicitu i změny rotačních stavů molekuly (dochází i ke změně rotačního stavu o $\Delta J=\pm1$). Molekulu HCl je tedy v prvním přiblížení možné považovat za kvantový harmonický oscilátor.

b) Kolik translačních, rotačních a vibračních stupňů volnosti má molekula chlóru?

Řešení

a) Vyjdeme z předpokladu, že při přechodu ($v \to v'$) dochází k absorpci fotonu o energii:

$$E_{fot} = \frac{hc}{\lambda} = E(v') - E(v),$$ (3 body)

kde $E(v) = \left(v + \frac{1}{2}\right)\hbar\,\omega$ jsou energie vibračních stavů molekul, v = 0, 1, 2,.... (3 body)

(h je Planckova konstanta, $\hbar$ je redukovaná Planckova konstanta a c je rychlost světla)

ve vztahu $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$ vystupuje redukovaná hmotnost $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ (pro dvouatomovou molekulu).

(3 body)

Pro přechod (0→1) molekuly $H^{35}Cl$ pak dostaneme:

$$\frac{\mathrm{hc}}{\lambda_{35Cl}} = E(1) - E(0) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\hbar\,\omega - \left(0 + \frac{1}{2}\right)\hbar\,\omega = \hbar\,\omega = \hbar\sqrt{\frac{k}{\mu_{35Cl}}}\ ,$$

obdobně pro přechod (0→1) molekuly $H^{37}Cl$ pak dostaneme:

$$\frac{hc}{\lambda_{37Cl}} = \hbar\sqrt{\frac{k}{\mu_{37Cl}}}$$ (3 body)

Z toho již snadno dostaneme poměr

$$\frac{\lambda_{35Cl}}{\lambda_{37Cl}} = \sqrt{\frac{\mu_{35Cl}}{\mu_{37Cl}}}$$ (3 body)

a po dosazení

$$\mu_{35Cl} = \frac{m_H m_{35Cl}}{m_H + m_{35Cl}} = \frac{A_r(\mathrm{H})A_r(35\mathrm{Cl})m_u{}^2}{A_r(\mathrm{H}) + A_r(35\mathrm{Cl})m_u} = \frac{1\cdot 35}{1+35}m_u = \frac{35}{36}m_u$$

$$\mu_{37Cl} = \frac{m_H m_{37Cl}}{m_H + m_{37Cl}} = \frac{A_r(\mathrm{H})A_r(37\mathrm{Cl})m_u{}^2}{A_r(\mathrm{H}) + A_r(37\mathrm{Cl})m_u} = \frac{1\cdot 37}{1+37}m_u = \frac{37}{38}m_u$$

(3 body)

$$\frac{\lambda_{35Cl}}{\lambda_{37Cl}} = \sqrt{\frac{35\cdot 38}{36\cdot 37}}$$ (2 body)

b) Jedná se o lineární molekulu o dvou atomech, tedy 6-ti stupni volnosti. Translační stupně volnosti jsou 3, rotační 2 a vibrační 1 (=6-3-2). (5 bodů)